

假設檢定 I

- 虛無假設與對立假設
- 型一錯誤與型二錯誤
- 假設檢定的流程
- 單一母體平均數檢定：母體標準差 σ 已知
- p-value
- 信賴區間與假設檢定

生活中常見的問題

- 犯人是否有罪？
- 藥品是否有效？
- 產品是否符合規格？
- 奶粉重量是否確實為 500 公克？
- 食品防腐劑添加量是否超出國家安全標準？

虛無假設與對立假設

虛無假設與對立假設

- 假設檢定將想討論的問題區分為以下兩種敘述:
- 虛無假設 (Null Hypothesis, H_0): 對立假設之補事件
- 對立假設 (Alternative Hypothesis, H_1): 欲證明的事件

虛無假設與對立假設

- 若司法審判採無罪推定為基本精神，欲判決被告有罪需提出證據佐證其犯罪事實，則虛無假設與對立假設分別如下：

H_0 ：被告無罪

H_1 ：被告有罪

- 若藥廠想證明新藥有療效，則虛無假設與對立假設分別如下：

H_0 ：新藥無療效

H_1 ：新藥有療效

虛無假設與對立假設

- 育種家想證明新育成品種之作物單位面積平均產量超過 100 公斤，則虛無假設與對立假設分別如下：

H_0 ：新育成品種之農作物單位面積平均產量 $\leq$ 100 公斤

H_1 ：新育成品種之農作物單位面積平均產量 $>$ 100 公斤

- 消保官想證明奶粉平均重量低於 500 公克，則虛無假設與對立假設分別如下：

H_0 ：奶粉平均重量 $\geq$ 500 公克

H_1 ：奶粉平均重量 $<$ 500 公克

型一錯誤與型二錯誤

型一錯誤與型二錯誤

- 消保官於市面上隨機抽取 25 罐奶粉測量其重量，樣本平均數為 485 公克，若母體標準差已知 $\sigma = 30$ 公克，是否有充分的證據證明奶粉平均重量不足 500 公克？
- 實際情況有可能為：(1) 虛無假設為真；或 (2) 對立假設為真。
- 根據資料我們可以做出以下兩種決策：(1) 無法拒絕虛無假設 (Fail to Reject H_0)；或 (2) 拒絕虛無假設 (Reject H_0)。因此產生以下四種可能的情況：

決策	事實	
	H_0 為真	H_1 為真
無法拒絕 H_0	決策正確	型二錯誤
拒絕 H_0	型一錯誤	決策正確

型一錯誤與型二錯誤

- H_0 : 奶粉平均重量 ≥ 500 公克
 H_1 : 奶粉平均重量 < 500 公克

決策	事實	
	奶粉平均重量至少 500 公克	奶粉平均重量小於 500 公克
無法拒絕 H_0	決策正確	型二錯誤
拒絕 H_0	型一錯誤	決策正確

- H_0 : 新藥無療效
 H_1 : 新藥有療效

決策	事實	
	新藥無療效	新藥有療效
無法拒絕 H_0	決策正確	型二錯誤
拒絕 H_0	型一錯誤	決策正確

型一錯誤與型二錯誤

- 型一錯誤 (Type I Error): 虛無假設為真時，拒絕虛無假設。
- 型二錯誤 (Type II Error): 對立假設為真時，無法拒絕虛無假設。
- 型一錯誤: 事實上新藥無療效，推翻新藥無療效的說法。(消費者的損失)
型二錯誤: 事實上新藥有療效，無法推翻新藥無療效的說法。(生產者的損失)

型一錯誤與型二錯誤：司法判決

- H_0 : 被告無罪
 H_1 : 被告有罪

決策	事實	
	被告無犯罪	被告有犯罪
無法拒絕 H_0 (宣判無罪)	決策正確 (判決正確)	型二錯誤 (縱虎歸山)
拒絕 H_0 (宣判有罪)	型一錯誤 (誣陷忠良)	決策正確 (判決正確)

- 型一錯誤: 事實上被告沒犯罪, 法官判決有罪。
型二錯誤: 事實上被告有犯罪, 法官判決無罪。
- 思考: 型一錯誤與型二錯誤何者付出的代價 (成本) 較高?

型一錯誤與型二錯誤：醫療診斷

- H_0 : 患者沒生病
 H_1 : 患者有生病

決策	事實	
	患者沒生病	患者有生病
無法拒絕 H_0 (診斷沒生病)	決策正確 (診斷正確)	型二錯誤 (偽陰性)
拒絕 H_0 (診斷有生病)	型一錯誤 (偽陽性)	決策正確 (診斷正確)

- 型一錯誤: 事實上患者沒生病，醫生診斷有生病。(偽陽性、False Positive)
型二錯誤: 事實上患者有生病，醫生診斷沒生病。(偽陰性、False Negative)
- 思考: 型一錯誤與型二錯誤何者付出的代價 (成本) 較高?

假設檢定的流程

- 目的: 證明對立假設 H_1 為真。
- 方法: 利用資料證明虛無假設 H_0 不可能成立，則間接地證明對立假設 H_1 為真。
- 第一種結論: 無法拒絕虛無假設 H_0 。(這不代表虛無假設 H_0 為真，僅說明目前資料無法提供充分的證據推翻虛無假設 H_0)
- 第二種結論: 拒絕虛無假設 H_0 。

顯著水準與檢定力

- 如欲證明對立假設 H_1 為真，必須先控制型一錯誤發生的機率。
- 型一錯誤發生的機率：(顯著水準)

$$\begin{aligned}\alpha &= Pr(\text{型一錯誤發生}) \\ &= Pr(\text{拒絕 } H_0 | \text{當 } H_0 \text{ 為真})\end{aligned}$$

- 型二錯誤發生的機率：

$$\begin{aligned}\beta &= Pr(\text{型二錯誤發生}) \\ &= Pr(\text{無法拒絕 } H_0 | \text{當 } H_1 \text{ 為真})\end{aligned}$$

- 檢定力：(做正確決策的機率)

$$\begin{aligned}\text{Power} &= 1 - \beta \\ &= Pr(\text{拒絕 } H_0 | \text{當 } H_1 \text{ 為真})\end{aligned}$$

α 與 β 之間的關係

- α 降低，則 β 增加。 α 增加，則 β 降低。
- α 降低，檢定力降低。 α 增加，檢定力增加。
- α 固定，增加樣本數可以增加檢定力。

假設檢定的流程

- 步驟一：設定虛無假設 H_0 與對立假設 H_1 。
- 步驟二：設定顯著水準 α 。
- 步驟三：選擇適當的檢定統計量 (Test Statistic)。
- 步驟四：依據顯著水準決定拒絕域 (Rejection Region) 與決策規則 (Decision Rule)。
- 步驟五：收集資料計算檢定統計量，依據決策規則判定是否拒絕虛無假設。

單一母體平均數檢定:
母體標準差 σ 已知

奶粉重量

- 近日有多位民眾向消保官投訴，特定品牌奶粉標示重量為 500 公克，購買後發現實際重量明顯不足。為保障消費者權益消保官決定介入調查，若發現實際重量低於標示重量將依法對廠商進行裁罰。
- 步驟一：設定虛無假設 H_0 與對立假設 H_1
令 μ 表示奶粉重量之母體平均數，則虛無假設與對立假設分別如下：

$$H_0 : \mu \geq 500$$

$$H_1 : \mu < 500$$

- 步驟二：設定顯著水準 α
消保官願意承擔 0.05 的機率（風險）犯型一錯誤，則顯著水準設定如下：

$$\alpha = 0.05$$

- 步驟三: 選擇適當的檢定統計量

母體標準差 σ 已知時，單一母體平均數的假設檢定可採用 z 檢定統計量如下:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

其中 μ_0 為虛無假設所擬之母體平均數， σ 為母體標準差， n 為樣本數。

- 步驟四: 依據顯著水準決定拒絕域與決策規則

因對立假設考慮奶粉平均重量小於 500 公克，故為左尾檢定，顯著水準設定為 $\alpha = 0.05$ 時之決策規則如下:

如果 $z_0 < -z_{1-\alpha} = -1.645$ 則拒絕虛無假設 H_0

其中 $z_{1-\alpha}$ 為標準常態分配之百分位數。

- 步驟五: 收集資料計算檢定統計量，依據決策規則判定是否拒絕虛無假設

消保官於市面上隨機抽取 25 罐奶粉測量其重量，樣本平均數為 485 公克，母體標準差已知為 $\sigma = 30$ 公克，則檢定統計量可計算如下：

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \\ &= \frac{485 - 500}{30 / \sqrt{25}} \\ &= -2.5 \end{aligned}$$

依據步驟四所擬之決策規則

$$z_0 = -2.5 < -1.645 = -z_{1-\alpha}$$

z_0 落於拒絕域，故拒絕虛無假設 H_0 ，根據樣本資料，消保官決定推翻奶粉平均重量至少 500 公克的說法。

雞蛋產量

- 根據過往經驗，每隻雞每月平均蛋產量為 21 顆。有一位雞農突發奇想在飼料中加入魚骨粉，認為改良飼料配方有助於增加雞蛋平均產量。
- 步驟一：設定虛無假設 H_0 與對立假設 H_1
令 μ 表示餵養新配方飼料後每隻雞每月雞蛋平均產量，則虛無假設與對立假設分別如下：

$$H_0 : \mu \leq 21$$

$$H_1 : \mu > 21$$

- 步驟二：設定顯著水準 α
雞農願意承擔 0.05 的機率（風險）犯型一錯誤，則顯著水準設定如下：

$$\alpha = 0.05$$

- 步驟三: 選擇適當的檢定統計量

母體標準差 σ 已知時，單一母體平均數的假設檢定可採用 z 檢定統計量如下:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- 步驟四: 依據顯著水準決定拒絕域與決策規則

因對立假設考慮每月雞蛋平均產量大於 21 顆，故為右尾檢定，顯著水準設定為 $\alpha = 0.05$ 時之決策規則如下:

如果 $z_0 > z_{1-\alpha} = 1.645$ 則拒絕虛無假設 H_0

- 步驟五: 收集資料計算檢定統計量, 依據決策規則判定是否拒絕虛無假設

雞農隨機抽取 100 隻雞, 在其飼料中添加魚骨粉, 並記錄其每月雞蛋產量, 樣本平均數為 24 顆, 母體標準差已知為 $\sigma = 9$ 顆, 則檢定統計量可計算如下:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \\ &= \frac{24 - 21}{9 / \sqrt{100}} \\ &= 3.3333 \end{aligned}$$

依據步驟四所擬之決策規則

$$z_0 = 3.3333 > 1.645 = z_{1-\alpha}$$

z_0 落於拒絕域, 拒絕虛無假設 H_0 , 根據樣本資料, 雞農有充分證據推翻飼料添加魚骨粉每月雞蛋平均產量低於 21 顆的說法。

膽固醇濃度

- 全國成年人血液膽固醇平均濃度為 180mg/dL。因飲食習慣差異，公衛學者猜想某地區成年人膽固醇平均濃度與全國的情形不一致，並非 180mg/dL。

- 步驟一：設定虛無假設 H_0 與對立假設 H_1

令 μ 表示該地區成年人血液膽固醇平均濃度，則虛無假設與對立假設分別如下：

$$H_0 : \mu = 180$$

$$H_1 : \mu \neq 180$$

- 步驟二：設定顯著水準 α

公衛學者願意承擔 0.05 的機率（風險）犯型一錯誤，則顯著水準設定如下：

$$\alpha = 0.05$$

- 步驟三: 選擇適當的檢定統計量

母體標準差 σ 已知時，單一母體平均數的假設檢定可採用 z 檢定統計量如下:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- 步驟四: 依據顯著水準決定拒絕域與決策規則

因對立假設考慮膽固醇平均濃度不等於 180mg/dL，故為雙尾檢定，顯著水準設定為 $\alpha = 0.05$ 時之決策規則如下:

如果 $z_0 < -z_{1-\alpha/2} = -1.96$ 或 $z_0 > z_{1-\alpha/2} = 1.96$ 則拒絕虛無假設 H_0

- 步驟五: 收集資料計算檢定統計量，依據決策規則判定是否拒絕虛無假設
公衛學者於該地區隨機抽樣 16 位成年民眾並測量其血液膽固醇濃度，樣本平均數為 200mg/dL，母體標準差已知為 $\sigma = 50\text{mg/dL}$ ，則檢定統計量可計算如下：

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \\ &= \frac{200 - 180}{50/\sqrt{16}} \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

依據步驟四所擬之決策規則

$$z_0 = 1.6 < 1.96 = z_{1-\alpha/2}$$

z_0 未落於拒絕域，故無法拒絕虛無假設 H_0 ，根據樣本資料，公衛學者沒有充分的證據推翻該地區民眾膽固醇平均濃度等於 180mg/dL 的說法。

左尾檢定

- 虛無假設與對立假設:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

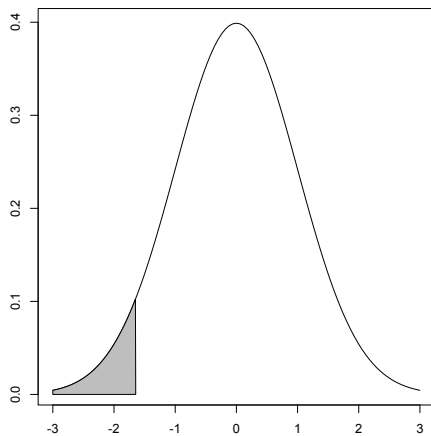
- 檢定統計量:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- 決策規則:

若 $z_0 < -z_{1-\alpha}$ 則拒絕虛無假設 H_0

左尾檢定：拒絕域



右尾檢定

- 虛無假設與對立假設:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

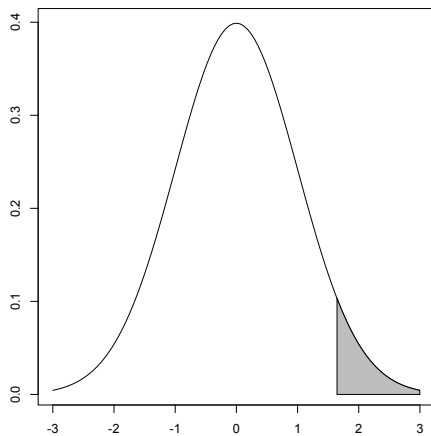
- 檢定統計量:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- 決策規則:

若 $z_0 > z_{1-\alpha}$ 則拒絕虛無假設 H_0

右尾檢定：拒絕域



雙尾檢定

- 虛無假設與對立假設:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

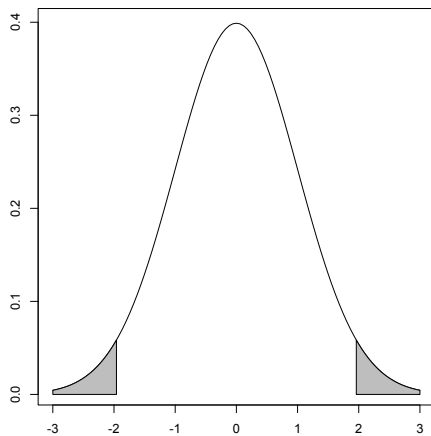
- 檢定統計量:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- 決策規則:

若 $z_0 < -z_{1-\alpha/2}$ 或 $z_0 > z_{1-\alpha/2}$ 則拒絕虛無假設 H_0

雙尾檢定：拒絕域



p-value

- p-value: 虛無假設 H_0 成立之下，出現與目前樣本資料或樣本檢定統計量相同或更極端、更不尋常的機率。
- 「極端」與「不尋常」的定義視左尾、右尾或雙尾檢定而有所不同。
- 當 p-value 小於顯著水準 α ，則拒絕虛無假設 H_0

奶粉重量: p-value

- 虛無假設與對立假設:

$$H_0 : \mu \geq 500$$

$$H_1 : \mu < 500$$

- 樣本平均數 $\bar{x} = 485$ ，母體標準差 $\sigma = 30$ ，樣本數 $n = 25$ 。則 p-value 計算如下:

$$\begin{aligned}\text{p-value} &= Pr(\bar{X} < 485) \\ &= Pr\left(\frac{\bar{X} - 500}{30/\sqrt{25}} < \frac{485 - 500}{30/\sqrt{25}}\right) \\ &= Pr(Z < -2.5) \\ &= 0.0062\end{aligned}$$

- 若顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，則拒絕虛無假設 H_0 ，因為

$$\text{p-value} = 0.0062 < 0.05 = \alpha$$

雞蛋產量: p-value

- 虛無假設與對立假設:

$$H_0 : \mu \leq 21$$

$$H_1 : \mu > 21$$

- 樣本平均數 $\bar{x} = 24$ ，母體標準差 $\sigma = 9$ ，樣本數 $n = 100$ 。則 p-value 計算如下:

$$\begin{aligned}\text{p-value} &= Pr(\bar{X} > 24) \\ &= Pr\left(\frac{\bar{X} - 21}{9/\sqrt{100}} > \frac{24 - 21}{9/\sqrt{100}}\right) \\ &= Pr(Z > 3.3) \\ &= 0.0005\end{aligned}$$

- 若顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，則拒絕虛無假設 H_0 ，因為

$$\text{p-value} = 0.0005 < 0.05 = \alpha$$

膽固醇濃度: p-value

- 虛無假設與對立假設:

$$H_0 : \mu = 180$$

$$H_1 : \mu \neq 180$$

- 樣本平均數 $\bar{x} = 200$ ，母體標準差 $\sigma = 50$ ，樣本數 $n = 16$ 。則 p-value 計算如下:

$$\begin{aligned}\text{p-value} &= 2 \times Pr(\bar{X} > 200) \\ &= 2 \times Pr\left(\frac{\bar{X} - 180}{50/\sqrt{16}} > \frac{200 - 180}{50/\sqrt{16}}\right) \\ &= 2 \times Pr(Z > 1.6) \\ &= 0.1096\end{aligned}$$

- 若顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，則無法拒絕虛無假設 H_0 ，因為

$$\text{p-value} = 0.1096 > 0.05 = \alpha$$

信賴區間與假設檢定

信賴區間與假設檢定

- 左尾檢定: $H_0: \mu \geq \mu_0$ 與 $H_1: \mu < \mu_0$
若 $(1 - \alpha) 100\%$ 信賴上界小於 μ_0 ，則拒絕虛無假設 H_0 :

$$U = \bar{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0$$

- 右尾檢定: $H_0: \mu \leq \mu_0$ 與 $H_1: \mu > \mu_0$
若 $(1 - \alpha) 100\%$ 信賴下界大於 μ_0 ，則拒絕虛無假設 H_0 :

$$L = \bar{x} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu_0$$

- 雙尾檢定: $H_0: \mu = \mu_0$ 與 $H_1: \mu \neq \mu_0$
若 $(1 - \alpha) 100\%$ 信賴區間不包括 μ_0 ，則拒絕虛無假設 H_0 :

$$L = \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu_0 \text{ 或 } U = \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0$$

奶粉重量：信賴區間

- 虛無假設與對立假設：

$$H_0 : \mu \geq 500$$

$$H_1 : \mu < 500$$

- 95% 信賴上界為

$$\begin{aligned} U &= \bar{x} + z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 485 + 1.645 \frac{30}{\sqrt{25}} \\ &= 494.87 \end{aligned}$$

- 因為 95% 信賴上界小於 μ_0 ：

$$U = 494.87 < 500 = \mu_0$$

故拒絕虛無假設 H_0

雞蛋產量：信賴區間

- 虛無假設與對立假設：

$$H_0 : \mu \leq 21$$

$$H_1 : \mu > 21$$

- 95% 信賴下界為

$$\begin{aligned} L &= \bar{x} - z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 24 - 1.645 \frac{9}{\sqrt{100}} \\ &= 22.5195 \end{aligned}$$

- 因為 95% 信賴下界大於 μ_0 ：

$$L = 22.5195 > 21 = \mu_0$$

故拒絕虛無假設 H_0

膽固醇濃度：信賴區間

- 虛無假設與對立假設：

$$H_0 : \mu = 180$$

$$H_1 : \mu \neq 180$$

- 95% 信賴區間為

$$L = \bar{x} - z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 200 - 1.96 \frac{50}{\sqrt{16}} = 175.5$$

$$U = \bar{x} + z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 200 + 1.96 \frac{50}{\sqrt{16}} = 224.5$$

- 因為 μ_0 落於 95% 信賴區間：

$$L = 175.5 < \mu_0 = 180 < 224.5 = U$$

故無法拒絕虛無假設 H_0

左尾檢定：單一母體平均數且母體標準差 σ 已知

- 虛無假設與對立假設：

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ 與 } H_1 : \mu < \mu_0$$

拒絕虛無假設 H_0 ，如果：

- 1. 檢定統計量落於拒絕域：

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$$

- 2. p-value 小於顯著水準：

$$\text{p-value} = Pr(Z < z_0) < \alpha$$

- 3. 信賴上界小於 μ_0 ：

$$U = \bar{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0$$

右尾檢定：單一母體平均數且母體標準差 σ 已知

- 虛無假設與對立假設：

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ 與 } H_1 : \mu > \mu_0$$

拒絕虛無假設 H_0 ，如果：

- 1. 檢定統計量落於拒絕域：

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

- 2. p-value 小於顯著水準：

$$\text{p-value} = Pr(Z > z_0) < \alpha$$

- 3. 信賴下界大於 μ_0 ：

$$L = \bar{x} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu_0$$

雙尾檢定：單一母體平均數且母體標準差 σ 已知

- 虛無假設與對立假設：

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 與 } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

拒絕虛無假設 H_0 ，如果：

- 1. 檢定統計量落於拒絕域：

$$|z_0| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\alpha/2}$$

- 2. p-value 小於顯著水準：

$$\text{p-value} = 2 \times Pr(Z > |z_0|) < \alpha$$

- 3. 信賴區間不包含 μ_0 ：

$$L = \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu_0 \text{ 或 } U = \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0$$