

2

二次方根與畢氏定理

2-1 二次方根的意義

1. 根號
2. $\sqrt{a^2}$ 的值
3. $\sqrt{a}$ 的近似值
4. 平方根的意義

2-3 畢氏定理

1. 畢氏定理
2. 平面上兩點的距離

2-2 根式的運算

1. 根式的表示
2. 根式的乘法
3. 根式的除法
4. 根式的加減
5. 根式的四則運算





任何 3C 產品, 都不可以使用過度喔!



。四 5 5 碼: 景攝

學習
前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

7 上第 1 章

回顧 ① 四捨五入

數線上有一個數 a 滿足 $2.34 < a < 2.35$ ，即 a 的值介於 2.34 與 2.35 之間，則 a 的值為 $2.34 \dots$ ，將 a 四捨五入至小數點後第一位所得到的數為 2.3。

課前練習

數線上有一個數 a 滿足 $1.85 < a < 1.86$ ，將 a 四捨五入至小數點後第一位所得到的數為_____。

7 下第 2 章

回顧 ② 坐標

在坐標平面上，小星由 $(2, -3)$ 沿著與 x 軸平行的方向，向右移動 3 個單位，可得新的 x 坐標為 $2+3=5$ ；再沿著與 y 軸平行的方向，向下移動 4 個單位，可得新的 y 坐標為 $-3-4=-7$ ，此時可到達 $(5, -7)$ 。

課前練習

在坐標平面上，美雅由 $(-2, -1)$ 沿著與 x 軸平行的方向，向左移動 2 個單位，再沿著與 y 軸平行的方向，向上移動 4 個單位，可到達 P 點，則 P 點的坐標為_____。

8 上第 1 章

回顧 ③ 乘法公式

$(a+3)(a-3)$ 是平方差公式的形式，因此 $(a+3)(a-3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$ 。

課前練習

$(2+x)(2-x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答：1. 1.9 2. $(-4, 3)$ 3. $4-x^2$

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 ① 四捨五入

回顧 ① 四捨五入
數線上有一個數 a 滿足 $2.34 < a < 2.35$ ，即 a 的值介於 2.34 與 2.35 之間，則 a 的值為 $2.34 \dots$ ，將 a 四捨五入至小數點後第一位所得到的數為 2.3。

課前練習

數線上有一個數 a 滿足 $1.85 < a < 1.86$ ，將 a 四捨五入至小數點後第一位所得到的數為 _____。

回顧 ② 坐標

回顧 2 坐標
在坐標平面上，小星由 $(2, -3)$ 沿著與 x 軸平行的方向，向右移動 3 個單位，可得新的 x 坐標為 $2+3=5$ ；再沿著與 y 軸平行的方向，向下移動 4 個單位，可得新的 y 坐標為 $-3-4=-7$ ，此時可到達 $(5, -7)$ 。

課前練習

前練習

在坐標平面上，美雅由 $(-2, -1)$ 沿著與 x 軸平行的方向，向左移動 2 個單位，再沿著與 y 軸平行的方向，向上移動 4 個單位，可到達 P 點，則 P 點的坐標為

回顧 ③ 乘法公式

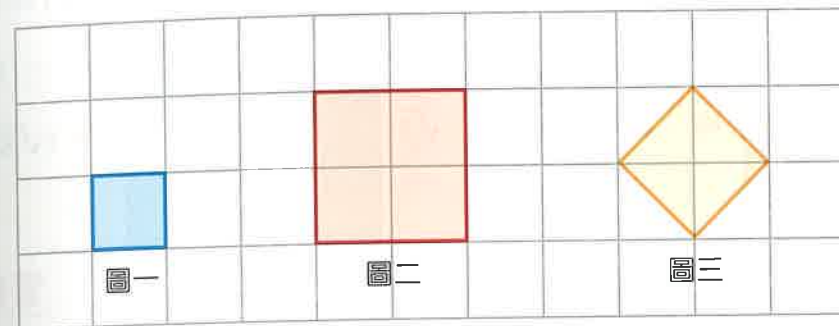
回顧 3 乘法公式
 $(a+3)(a-3)$ 是平方差公式的形式，因此 $(a+3)(a-3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$ 。

課前練習

$$(2+x)(2-x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2-1 二次方根的意義

1 根號



如圖一，邊長為 1 的正方形，其面積為 1；如圖二，邊長為 2 的正方形，其面積為 4。那麼，有沒有面積為 2 的正方形呢？觀察圖三，可以發現此正方形的面積為 2，則它的邊長是多少呢？

探索活動 正方形的邊長

右圖是面積為 2 的正方形，

- (1) 用尺量一量，這個黃色正方形的邊長是 1.4 嗎？

☐是 ☐不是

用計算機算算看： $1.4^2 =$

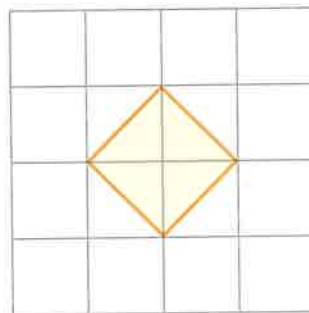
- (2) 用尺量一量，這個黃色正方形的邊長是 1.5 嗎？

☐是 ☐不是

用計算機算算看： $1.5^2 =$ 。

- (3) 猜猜看：此正方形的邊長 =

用計算機算算看你所猜的數其平方=

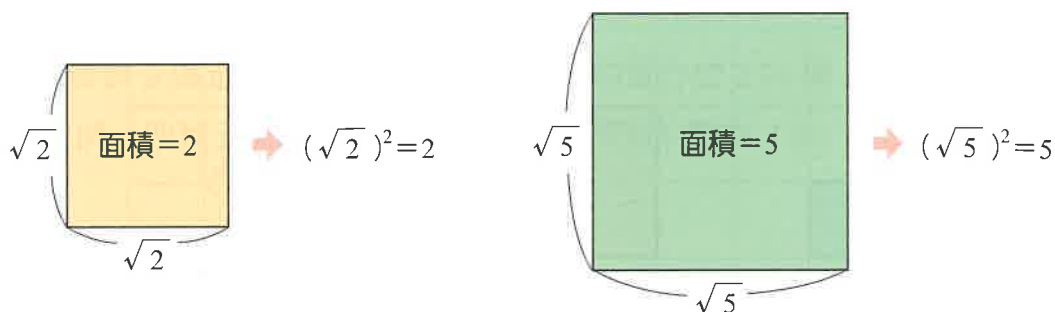


班上同學有人所猜的數，
其平方是 2 的嗎？



假設面積為 2 的正方形，其邊長為 m ，則 $m^2=2$ 。又 $1.4^2=1.96$ ， $1.5^2=2.25$ ，所以 $1.4 < m < 1.5$ ，也就是說， m 無法用一位小數表示。

同樣的道理， $1.41^2=1.9881$ ， $1.42^2=2.0164$ ，所以 $1.41 < m < 1.42$ ，也就是說，這個數不只有兩位小數。事實上， m 無法用任何小數或分數表示，因此， m 的值我們以一個新的符號 $\sqrt{2}$ （讀作**根號二**）來代表此數，亦即面積為 2 的正方形，它的邊長記為 $\sqrt{2}$ ；而面積為 5 的正方形，它的邊長記為 $\sqrt{5}$ 。

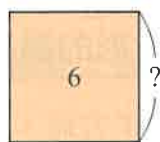


以此類推，面積為 a 的正方形，它的邊長記為 $\sqrt{a}$ 。反之，若 $a > 0$ ，正方形的邊長為 $\sqrt{a}$ ，則正方形的面積為 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。

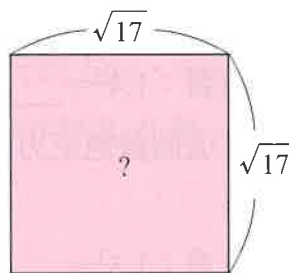


隨堂練習

1. 正方形的面積為 6，其邊長可記為_____。



2. 邊長為 $\sqrt{17}$ 的正方形，其面積為_____。



$\sqrt{a}$ 的意義

- 面積為 a 的正方形，其邊長記為 $\sqrt{a}$ 。
- 若 $a > 0$ ，則 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。

例1 $\sqrt{a}$ 的平方

自評 P69 第 1 題

計算下列各數：

(1) $(\sqrt{14})^2$

(2) $(\sqrt{\frac{2}{3}})^2$

解 (1) $(\sqrt{14})^2 = 14$

(2) $(\sqrt{\frac{2}{3}})^2 = \frac{2}{3}$

隨堂練習

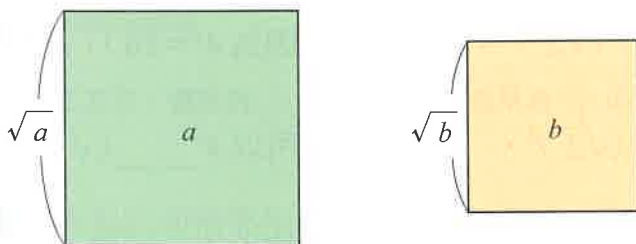
1. 在下列空格中填入適當的數：

(1) $(\sqrt{7})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $(\sqrt{\frac{1}{5}})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若乙數 > 0 ，且 $(\text{乙數})^2 = 13$ ，則乙數可記為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

如下圖，比較兩個面積不同的正方形時，面積較大的正方形，它的邊長比較長。



利用這個概念，可以得知：若 a 、 b 為正數，且 $a > b$ ，則 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

例2 比較大小

比較 $\sqrt{99}$ 、 10 、 $\sqrt{101}$ 三數的大小。

解 $(\sqrt{99})^2 = 99$ ，

$10^2 = 100$ ，

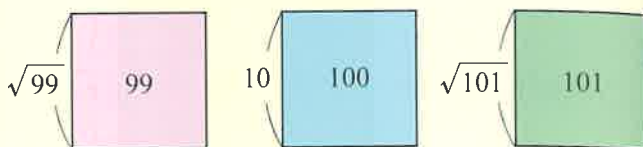
$(\sqrt{101})^2 = 101$ ，

因為 $101 > 100 > 99$ ，

又 $\sqrt{99}$ 、 10 、 $\sqrt{101}$ 均為正數，

所以 $\sqrt{101} > 10 > \sqrt{99}$ 。

利用正方形面積比較邊長大小：



隨堂練習

比較下列各小題中，數的大小關係：（在空格中填入 $>$ 或 $<$ ）

(1) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ _____ $\sqrt{2}$

(2) 4 _____ $\sqrt{15}$

解 因為 $(\sqrt{\frac{5}{3}})^2 = \frac{5}{3}$ ， $(\sqrt{2})^2 = 2$ ，

解 因為 $4^2 = 16$ ， $(\sqrt{15})^2 = 15$ ，

所以 $(\sqrt{\frac{5}{3}})^2$ _____ $(\sqrt{2})^2$ ，

所以 4^2 _____ $(\sqrt{15})^2$ ，

故 $\sqrt{\frac{5}{3}}$ _____ $\sqrt{2}$ 。

故 4 _____ $\sqrt{15}$ 。

(3) $\sqrt{8}$ _____ 3 _____ $\sqrt{10}$

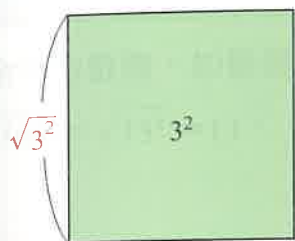
(4) 2.7 _____ $\sqrt{7}$ _____ 2.6

2 $\sqrt{a^2}$ 的值

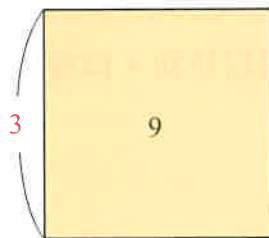
當一個正方形的邊長為 3 時，其面積為 9；而一個面積為 9 的正方形，其邊長也可以記為 $\sqrt{9}$ ，所以 $\sqrt{9} = 3$ 。

我們將利用面積相等的正方形說明 $\sqrt{a^2}$ 的化簡。

1



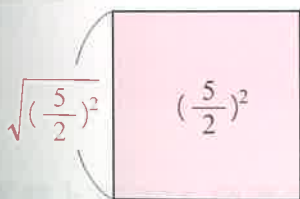
面積為 3^2 的正方形，邊長為 $\sqrt{3^2}$ 。



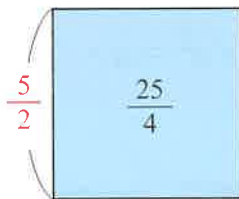
面積為 9 的正方形，邊長為 3。

上圖中，兩個正方形的面積都相等，所以這兩個正方形的邊長也會相等。
又面積為 9 的正方形，其邊長是 3，因此， $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ 。

2



面積為 $(\frac{5}{2})^2$ 的正方形，邊長為 $\sqrt{(\frac{5}{2})^2}$ 。



面積為 $\frac{25}{4}$ 的正方形，邊長為 $\frac{5}{2}$ 。

上圖中，兩個正方形的面積都相等，所以這兩個正方形的邊長也會相等。
又面積為 $\frac{25}{4}$ 的正方形，其邊長是 $\frac{5}{2}$ ，因此， $\sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{(\frac{5}{2})^2} = \frac{5}{2}$ 。

由上述可知，若 a 為正數，面積為 a^2 的正方形，其邊長可記為 $\sqrt{a^2}$ ；邊長為 a 的正方形，其面積為 a^2 ，所以當 $a > 0$ 時， $\sqrt{a^2} = a$ 。

例 3 求 $\sqrt{a^2}$ 的值

計算下列各數：

(1) $\sqrt{9^2}$

(2) $\sqrt{\frac{25}{36}}$

解 (1) $\sqrt{9^2} = 9$

(2) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}$

隨堂練習

計算下列各數：

(1) $\sqrt{(0.4)^2}$

(2) $\sqrt{49}$

√a² 的化簡若 $a > 0$ ，則 $\sqrt{a^2} = a$ 。**補給站** $\sqrt{(-a)^2}$ 的值我們知道 $\sqrt{2^2} = 2$ ，那麼 $\sqrt{(-2)^2}$ 的值為何呢？由於 $(-2)^2 = 4$ ， $2^2 = 4$ ，因此 $\sqrt{(-2)^2}$ 和 $\sqrt{2^2}$ 都能寫成 $\sqrt{4}$ ，故 $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$ 。又如 $\sqrt{(-1.1)^2} = \sqrt{(1.1)^2} = 1.1$ ， $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$ ，由上可知：若 $a > 0$ 時，則 $\sqrt{(-a)^2} = a$ 。

若一個整數 m 是某個整數 a 的平方，即 $m=a^2$ ，則 m 稱為**完全平方數**。

例如： $81=9^2$ ， $289=17^2$ ，因此 81 及 289 都是完全平方數。

將 100 至 400 的完全平方數，列表如下：

整數 a^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
完全平方數 m	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

熟悉完全平方數後，如果根號內是一個完全平方數時，就可以很容易求得它的值，例如： $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$ 。

隨堂練習

1. 根據上表，求下列各數的值：

(1) $\sqrt{196}$

(2) $\sqrt{225}$

(3) $\sqrt{289}$

(4) $\sqrt{361}$

2. 圍棋棋盤上有 324 個邊長都是 1 的小方格，則盤面上方格所構成之最大正方形的邊長是多少？



當根號內的數無法直接看出它是否為某正數的平方時，可利用下面的方法求出它的值。

例4 利用質因數分解求 $\sqrt{a^2}$ 的值

自評 P69 第 2(3)(4)、3 題

計算下列各數：

(1) $\sqrt{784}$

(2) $\sqrt{2^4 \times 3^2 \times 7^2}$

(3) $\sqrt{1.96}$

解

$$(1) \sqrt{784} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 7^2} = \sqrt{(2 \times 2 \times 7)^2} \\ = \sqrt{28^2} = 28$$

$$(2) \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 7^2} = \sqrt{(2^2 \times 3 \times 7)^2} \\ = \sqrt{84^2} = 84$$

$$(3) \sqrt{1.96} = \sqrt{\frac{196}{100}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 7^2}{2^2 \times 5^2}} \\ = \sqrt{\left(\frac{2 \times 7}{2 \times 5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{7}{5} = 1.4$$



$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 784} \\ 2 \overline{) 392} \\ 2 \overline{) 196} \\ 2 \overline{) 98} \\ 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 196} \\ 2 \overline{) 98} \\ 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array}$$

隨堂練習

計算下列各數：

(1) $\sqrt{576}$

(2) $\sqrt{2^2 \times 3^4 \times 5^4}$

(3) $\sqrt{4.41}$

當根號內的數無法直接看出它是否為某正數的平方時，可利用下面的方法求出它的值。

例4 利用質因數分解求 $\sqrt{a^2}$ 的值

自評 P69 第 2(3)(4)、3 題

計算下列各數：

(1) $\sqrt{784}$

(2) $\sqrt{2^4 \times 3^2 \times 7^2}$

(3) $\sqrt{1.96}$

解 (1) $\sqrt{784} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 7^2} = \sqrt{(2 \times 2 \times 7)^2}$
 $= \sqrt{28^2} = 28$

(2) $\sqrt{2^4 \times 3^2 \times 7^2} = \sqrt{(2^2 \times 3 \times 7)^2}$
 $= \sqrt{84^2} = 84$

(3) $\sqrt{1.96} = \sqrt{\frac{196}{100}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 7^2}{2^2 \times 5^2}}$
 $= \sqrt{\left(\frac{2 \times 7}{2 \times 5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{7}{5} = 1.4$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 784} \\ \underline{2 392} \\ 2 196 \\ \underline{2 98} \\ 7 49 \\ \underline{7 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 196} \\ \underline{2 98} \\ 7 49 \\ \underline{7 0} \end{array}$$

隨堂練習

計算下列各數：

(1) $\sqrt{576}$

(2) $\sqrt{2^2 \times 3^4 \times 5^4}$

(3) $\sqrt{4.41}$

3 $\sqrt{a}$ 的近似值

▶ 十分逼近法

正方形的面積為 3，其邊長可記為 $\sqrt{3}$ ，那麼 $\sqrt{3}$ 的近似值應該是多少呢？

因為 $1^2 = 1 < 3$ ，且 $2^2 = 4 > 3$ ，所以 $1 < \sqrt{3} < 2$ ，故 $\sqrt{3} = 1. \dots$ ，即 $\sqrt{3}$ 的整數部分為 1，下面的 **探索活動** 將進一步推導 $\sqrt{3}$ 的近似值。

探索活動 十分逼近法

1. 將 1 到 2 之間分成十等分，並使用計算機

求出這九個等分點 1.1 至 1.9 的平方：

(1.1)² = _____

(1.2)² = _____

(1.3)² = _____

(1.4)² = _____

(1.5)² = _____

(1.6)² = _____

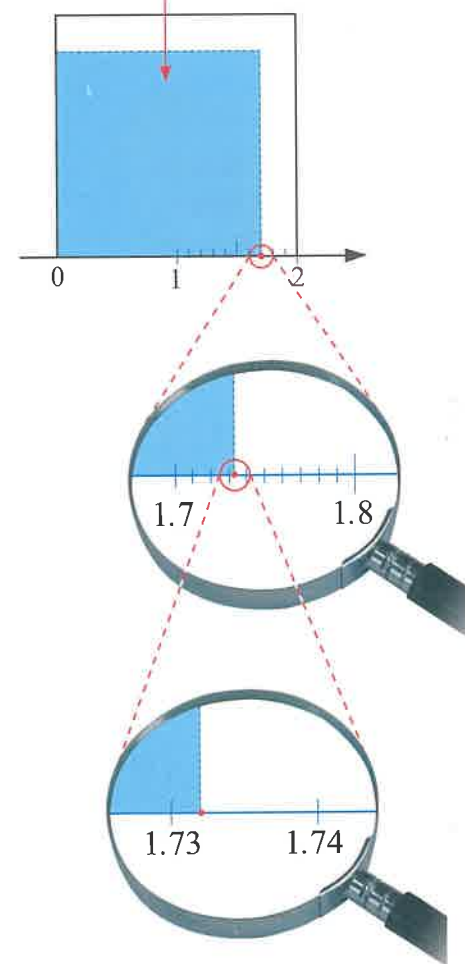
(1.7)² = _____

(1.8)² = _____

(1.9)² = _____

2. 3 介於第 1. 題中哪兩個平方數之間？

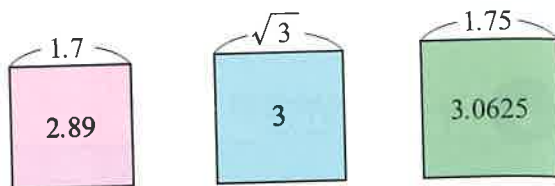
面積為 3 的正方形，邊長為 $\sqrt{3}$ 。



因為 $(\sqrt{3})^2 = 3$ ，對照上面 1.1 至 1.9 九個數的平方，可知 $(1.7)^2 < (\sqrt{3})^2 < (1.8)^2$ ，所以 $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ 。

那麼 $\sqrt{3}$ 到底比較靠近 1.7 還是 1.8 呢？

我們知道 $(1.75)^2 = 3.0625$ ，
所以 $1.7 < \sqrt{3} < 1.75$ 。



如果用四捨五入法求得 $\sqrt{3}$ 的近似值到小數點後第一位，即 $\sqrt{3} \approx 1.7$ 。（ $\approx$ 讀作「近似於」）依此方式進行，可以求出 $\sqrt{3}$ 的近似值到任意小數位數，這個方法稱為**十分逼近法**。



將十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位的過程，整理如下：

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

$$(1) 1^2 = 1, 2^2 = 4,$$

$$\text{因為 } 1^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2,$$

$$\text{所以 } 1 < \sqrt{3} < 2.$$

$$(2) (1.7)^2 = 2.89, (1.8)^2 = 3.24,$$

$$\text{因為 } (1.7)^2 < (\sqrt{3})^2 < (1.8)^2,$$

$$\text{所以 } 1.7 < \sqrt{3} < 1.8.$$

$$(3) \text{因為 } (1.75)^2 = 3.0625,$$

$$\text{所以 } 1.7 < \sqrt{3} < 1.75.$$

經四捨五入得 $\sqrt{3} \approx 1.7$

$$\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 4 \end{array} \quad \leftarrow 3 = (\sqrt{3})^2$$

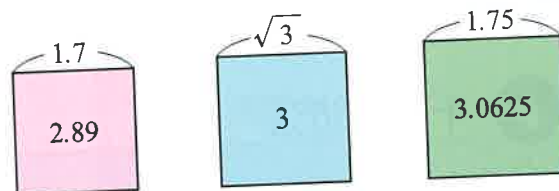
$$\begin{array}{l} (1.7)^2 = 2.89 \\ (1.8)^2 = 3.24 \end{array} \quad \leftarrow 3 = (\sqrt{3})^2$$

$$\begin{array}{l} (1.7)^2 = 2.89 \\ (1.75)^2 = 3.0625 \end{array} \quad \leftarrow 3 = (\sqrt{3})^2$$

簡單的說，求 $\sqrt{3}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位，是用十分逼近法先得到 $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ ，再判別 $\sqrt{3}$ 比較靠近 1.7 還是 1.8。1.75 是數線上 1.7 與 1.8 的中點，因為 $(\sqrt{3})^2 < (1.75)^2$ ，所以 $\sqrt{3} < 1.75$ ，也就是 $\sqrt{3}$ 比較靠近 1.7，故小數點後第二位必須捨去，得 $\sqrt{3} \approx 1.7$ 。

那麼 $\sqrt{3}$ 到底比較靠近 1.7 還是 1.8 呢？

我們知道 $(1.75)^2 = 3.0625$ ，
所以 $1.7 < \sqrt{3} < 1.75$ 。



如果用四捨五入法求得 $\sqrt{3}$ 的近似值到小數點後第一位，即 $\sqrt{3} \approx 1.7$ 。（ $\approx$ 讀作「近似於」）依此方式進行，可以求出 $\sqrt{3}$ 的近似值到任意小數位數，這個方法稱為**十分逼近法**。



將十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位的過程，整理如下：

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

- (1) $1^2 = 1$ ， $2^2 = 4$ ，
因為 $1^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2$ ，
所以 $1 < \sqrt{3} < 2$ 。

$$\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 4 \end{array} \quad \leftarrow 3 = (\sqrt{3})^2$$

- (2) $(1.7)^2 = 2.89$ ， $(1.8)^2 = 3.24$ ，
因為 $(1.7)^2 < (\sqrt{3})^2 < (1.8)^2$ ，
所以 $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ 。

$$\begin{array}{l} (1.7)^2 = 2.89 \\ (1.8)^2 = 3.24 \end{array} \quad \leftarrow 3 = (\sqrt{3})^2$$

- (3) 因為 $(1.75)^2 = 3.0625$ ，
所以 $1.7 < \sqrt{3} < 1.75$ 。

$$\begin{array}{l} (1.7)^2 = 2.89 \\ (1.75)^2 = 3.0625 \end{array} \quad \leftarrow 3 = (\sqrt{3})^2$$

經四捨五入得 $\sqrt{3} \approx 1.7$

簡單的說，求 $\sqrt{3}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位，是用十分逼近法先得到 $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ ，再判別 $\sqrt{3}$ 比較靠近 1.7 還是 1.8。1.75 是數線上 1.7 與 1.8 的中點，因為 $(\sqrt{3})^2 < (1.75)^2$ ，所以 $\sqrt{3} < 1.75$ ，也就是 $\sqrt{3}$ 比較靠近 1.7，故小數點後第二位必須捨去，得 $\sqrt{3} \approx 1.7$ 。

例 5 十分逼近法求近似值

利用十分逼近法求 $\sqrt{5}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位。

解 $(\sqrt{5})^2 = 5$

(1) $2^2 = 4$ ， $3^2 = 9$ ，

因為 $2^2 < (\sqrt{5})^2 < 3^2$ ，

所以 $2 < \sqrt{5} < 3$ 。

(2) 使用計算機計算 $(2.1)^2$ ， $(2.2)^2$ ，……， $(2.9)^2$ ，

可得 $(2.2)^2 = 4.84$ ， $(2.3)^2 = 5.29$ ，

因為 $(2.2)^2 < (\sqrt{5})^2 < (2.3)^2$ ，

所以 $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ 。

(3) 使用計算機計算 $(2.25)^2 = 5.0625 > 5$ ，

因為 $(\sqrt{5})^2 < (2.25)^2$ ，

所以 $\sqrt{5} < 2.25$ 。

經四捨五入得 $\sqrt{5} \approx 2.2$ 。

因為要以四捨五入法求到小數點後第一位，所以可判別 $\sqrt{5}$ 與 2.25 的大小，再決定是否進位。

隨堂練習

依下列各小題所提供的數據，按步驟回答下列問題，並求 $\sqrt{7}$ 的近似值到小數點後第一位。

- (1) 因為 $1^2 = 1$ ， $2^2 = 4$ ， $3^2 = 9$ ，所以 $\sqrt{7}$ 在哪兩個連續整數之間？

答：_____ $< \sqrt{7} <$ _____。

- (2) 因為 $(2.6)^2 = 6.76$ ， $(2.7)^2 = 7.29$ ， $(2.8)^2 = 7.84$ ，所以 $\sqrt{7}$ 在哪兩個連續一位小數之間？

答：_____ $< \sqrt{7} <$ _____。

- (3) 根據 $(2.65)^2 = 7.0225$ ，比較 $\sqrt{7}$ 和 2.65 的大小關係。（填 $>$ 或 $<$ ）

答： $\sqrt{7}$ _____ 2.65。

- (4) 以四捨五入法求 $\sqrt{7}$ 的近似值到小數點後第一位，得 $\sqrt{7} \approx$ _____。





1. 利用十分逼近法求平方根的近似值，過程非常繁瑣。因此也可以利用計算機求 $\sqrt{a}$ 的近似值。例如：求 $\sqrt{2}$ 的近似值，操作方法如下：

數值	按法	螢幕顯示
$\sqrt{2}$	2 SHIFT x^2	1.414213562

我們也可以利用計算機驗證這個數的平方就是 2。

按法	螢幕顯示
2 SHIFT x^2 ，再按 x^2	2



2. 以計算機按出 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{2.1}$ 、 $\sqrt{3.9}$ 、 $\sqrt{4.1}$ 的近似值，

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562, \sqrt{2.1} \approx 1.449137675,$$

$$\sqrt{3.9} \approx 1.974841766, \sqrt{4.1} \approx 2.024845673,$$

從計算機出現的結果，我們也可以歸納得到：

當 $a > b > 0$ 時， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

本教材使用之計算機
若需 $\sqrt{\quad}$ 功能，須先
按 **SHIFT**，再按 x^2



隨堂練習



利用計算機計算，並回答下列各題：

- (1) 求 $\sqrt{16.81}$ 的值。
- (2) $\sqrt{12345}$ 的整數部分是多少呢？
- (3) 比較 $\sqrt{123}$ 與 $\sqrt{132}$ 的大小。

自評 P70 第 5 題



1. 利用十分逼近法求平方根的近似值，過程非常繁瑣。因此也可以利用計算機求 $\sqrt{a}$ 的近似值。例如：求 $\sqrt{2}$ 的近似值，操作方法如下：

數值	按法	螢幕顯示
$\sqrt{2}$	2 SHIFT x^2	1.414213562

我們也可以利用計算機驗證這個數的平方就是 2。

按法	螢幕顯示
2 SHIFT x^2 ，再按 x^2	2.

2. 以計算機按出 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{2.1}$ 、 $\sqrt{3.9}$ 、 $\sqrt{4.1}$ 的近似值，
 $\sqrt{2} \approx 1.414213562$ ， $\sqrt{2.1} \approx 1.449137675$ ，
 $\sqrt{3.9} \approx 1.974841766$ ， $\sqrt{4.1} \approx 2.024845673$ ，
 從計算機出現的結果，我們也可以歸納得到：
 當 $a > b > 0$ 時， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

本教材使用之計算機
 若需 $\sqrt{\quad}$ 功能，須先
 按 **SHIFT**，再按 x^2



自評 P70 第 5 題

隨堂練習

利用計算機計算，並回答下列各題：

- 求 $\sqrt{16.81}$ 的值。
- $\sqrt{12345}$ 的整數部分是多少呢？
- 比較 $\sqrt{123}$ 與 $\sqrt{132}$ 的大小。

4 平方根的意義

當 $a \geq 0$ ，若 $b^2 = a$ ，則稱 b 是 a 的平方根（也稱為二次方根）。

例如： $(\sqrt{2})^2 = 2$ ← 即 $\sqrt{2}$ 是 2 的正平方根。

$(-\sqrt{2})^2 = 2$ ← 即 $-\sqrt{2}$ 是 2 的負平方根。

所以 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 都是 2 的平方根。

$\sqrt{2}$ 的相反數記為 $-\sqrt{2}$ 。



隨堂練習

- 判別 15 是否為 225 的平方根？
- 判別 -15 是否為 225 的平方根？

事實上，對於任意的正數 a ，

$(\sqrt{a})^2 = a$ ← 即 $\sqrt{a}$ 是 a 的正平方根。

$(-\sqrt{a})^2 = a$ ← 即 $-\sqrt{a}$ 是 a 的負平方根。

所以 $\sqrt{a}$ 、 $-\sqrt{a}$ 都是 a 的平方根，而且 $\sqrt{a}$ 和 $-\sqrt{a}$ 互為相反數。

因此，任意的正數都有兩個平方根，而這兩個平方根互為相反數。

正數的平方是正數，負數的平方也是正數，在國中階段，我們找不到任何一個數的平方是負數，所以負數沒有平方根。又 $0^2 = 0$ ，所以 0 的平方根只有 0，也就是 $\sqrt{0} = 0$ 。

平方根

- 若 $a > 0$ ，則 a 的平方根為 $\pm\sqrt{a}$ 。
- 若 $a < 0$ ，則 a 沒有平方根。
- 若 $a = 0$ ，則 a 的平方根為 0，也就是 $\sqrt{0} = 0$ 。



例 6 求平方根

求下列各數的平方根：

(1) 19

(2) 196

(3) $\frac{16}{2025}$

(4) $2\frac{1}{4}$

解 (1) 19 的平方根為 $\sqrt{19}$ 和 $-\sqrt{19}$ ，合併記為 $\pm\sqrt{19}$ 。(2) 196 的平方根為 $\sqrt{196}$ 和 $-\sqrt{196}$ ，

$$\pm\sqrt{196} = \pm\sqrt{14^2} = \pm 14，$$

所以 196 的平方根為 ± 14 。(3) $\frac{16}{2025}$ 的平方根為 $\sqrt{\frac{16}{2025}}$ 和 $-\sqrt{\frac{16}{2025}}$ ，

$$\pm\sqrt{\frac{16}{2025}} = \pm\sqrt{\left(\frac{4}{45}\right)^2} = \pm\frac{4}{45}，$$

所以 $\frac{16}{2025}$ 的平方根為 $\pm\frac{4}{45}$ 。(4) $2\frac{1}{4}$ 的平方根為 $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ 和 $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ，

$$\pm\sqrt{2\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \pm\frac{3}{2}，$$

所以 $2\frac{1}{4}$ 的平方根為 $\pm\frac{3}{2}$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 196} \\ \underline{4} \\ 156 \\ \underline{140} \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2025} \\ \underline{6} \\ 1625 \\ \underline{1575} \\ 50 \\ \underline{45} \\ 5 \end{array}$$

 $2\frac{1}{4}$ 須化為假分數 $\frac{9}{4}$ 。**隨堂練習**

1. 回答下列問題：

(1) 29 的正平方根為_____。

(2) 29 的負平方根為_____。

2. 求下列各數的平方根：

(1) 1225

(2) $1\frac{21}{100}$

(3) 4.84

例 6 求平方根

求下列各數的平方根：

(1) 19

(2) 196

(3) $\frac{16}{2025}$

(4) $2\frac{1}{4}$

解 (1) 19 的平方根為 $\sqrt{19}$ 和 $-\sqrt{19}$ ，
合併記為 $\pm\sqrt{19}$ 。

(2) 196 的平方根為 $\sqrt{196}$ 和 $-\sqrt{196}$ ，
 $\pm\sqrt{196} = \pm\sqrt{14^2} = \pm 14$ ，
所以 196 的平方根為 ± 14 。

(3) $\frac{16}{2025}$ 的平方根為 $\sqrt{\frac{16}{2025}}$ 和 $-\sqrt{\frac{16}{2025}}$ ，
 $\pm\sqrt{\frac{16}{2025}} = \pm\sqrt{(\frac{4}{45})^2} = \pm\frac{4}{45}$ ，
所以 $\frac{16}{2025}$ 的平方根為 $\pm\frac{4}{45}$ 。

(4) $2\frac{1}{4}$ 的平方根為 $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ 和 $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ，
 $\pm\sqrt{2\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\sqrt{(\frac{3}{2})^2} = \pm\frac{3}{2}$ ，
所以 $2\frac{1}{4}$ 的平方根為 $\pm\frac{3}{2}$ 。

隨堂練習

1. 回答下列問題：

(1) 29 的正平方根為_____。

(2) 29 的負平方根為_____。

2. 求下列各數的平方根：

(1) 1225

(2) $1\frac{21}{100}$

(3) 4.84

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 196} \\ 2 \overline{) 98} \\ 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2025} \\ 3 \overline{) 675} \\ 3 \overline{) 225} \\ 3 \overline{) 75} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$

$2\frac{1}{4}$ 須化為假分數 $\frac{9}{4}$ 。

例 7 平方根的應用

1. 若 14 是 a 的正平方根，則 $a = ?$ 2. 若 -8 是 $5x+4$ 的負平方根，則 $x = ?$

解 1. 因為 14 是 a 的正平方根，
所以 $a = 14^2 = 196$ 。

2. $5x+4 = (-8)^2$

$5x+4 = 64$

$x = 12$

-8 是 $5x+4$ 的負平方根，
所以 $5x+4$ 等於 -8 的平方。

隨堂練習

1. 若 -5 是 a 的負平方根，則 $a = ?$ 2. 若 6 是 $2x-8$ 的正平方根，求 x 的值。補給站 $\sqrt{\quad}$ 的由來

現今使用「 $\sqrt{\quad}$ 」作為根號(Radical)的符號，相傳是小寫 r 的變形，當時記為「 $\checkmark$ 」，源自於德國數學家魯道夫(Christoff Rudolff, 1499-1545)在 1525 年出版的《求根術》(Die Coss)這本書。到了 1637 年，法國數學家笛卡兒(René Descartes, 1596-1650)在《幾何學》(La Géométrie)這本書中，才使用「 $\sqrt{\quad}$ 」這個符號。例如：面積為 2 的正方形邊長沒有辦法用學過的整數、小數或分數來表示，所以用 $\sqrt{2}$ 這個符號來代表。

如果一個數可以化成分子、分母都是整數(分母可為 1)的分數形式(即 $\frac{q}{p}$ ，其中 $p、q$ 為整數，且 $p \neq 0$)，這樣的數稱為有理數。例如： $5 (= \frac{5}{1})$ 、 $-0.5 (= -\frac{1}{2})$ 、……都是有理數。然而像 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ ……這樣的數，無法化成 $\frac{q}{p}$ 的形式(其中 $p、q$ 為整數，且 $p \neq 0$)，就不是有理數。

1 $\sqrt{a}$ 的意義

(1) 正方形面積為 a 時，其邊長記為 $\sqrt{a}$ 。

(2) 若 $a > 0$ ，則 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。

例 (1) 正方形面積為 7 時，其邊長記為 $\sqrt{7}$ 。

(2) $(\sqrt{7})^2 = 7$ 。

2 $\sqrt{a^2}$ 的值

若 $a > 0$ ，則 $\sqrt{a^2} = a$ 。

例 $\sqrt{6^2} = 6$ 。

3 平方根

(1) 每一個正數 a 都有兩個平方根 $\sqrt{a}$ 與 $-\sqrt{a}$ ，合併記為 $\pm\sqrt{a}$ ，且這兩個平方根互為相反數。

例 正數 10 有兩個平方根 $\sqrt{10}$ 與 $-\sqrt{10}$ ，合併記為 $\pm\sqrt{10}$ 。

(2) 負數沒有平方根。

(3) 0 的平方根為 0。

重點回顧

1 $\sqrt{a}$ 的意義

(1) 正方形面積為 a 時，其邊長記為 $\sqrt{a}$ 。

(2) 若 $a > 0$ ，則 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。

例 (1) 正方形面積為 7 時，其邊長記為 $\sqrt{7}$ 。

(2) $(\sqrt{7})^2 = 7$ 。

2 $\sqrt{a^2}$ 的值

若 $a > 0$ ，則 $\sqrt{a^2} = a$ 。

例 $\sqrt{6^2} = 6$ 。

3 平方根

(1) 每一個正數 a 都有兩個平方根 $\sqrt{a}$ 與 $-\sqrt{a}$ ，合併記為 $\pm\sqrt{a}$ ，且這兩個平方根互為相反數。

例 正數 10 有兩個平方根 $\sqrt{10}$ 與 $-\sqrt{10}$ ，合併記為 $\pm\sqrt{10}$ 。

(2) 負數沒有平方根。

(3) 0 的平方根為 0。

2-1 自我評量

課 P55 例 1

① 在下列空格中填入適當的數：

(1) $(-\sqrt{18})^2 =$ _____

(2) $(\sqrt{\frac{3}{5}})^2 =$ _____

(3) $(\sqrt{16})^2 =$ _____

(4) $(-\sqrt{1.3})^2 =$ _____

② 計算下列各數：

(1) $-\sqrt{\frac{16}{49}} =$ _____

課 P58 例 3

(2) $\sqrt{1\frac{11}{25}} =$ _____

課 P58 例 3

(3) $\sqrt{10000} =$ _____

課 P60 例 4

(4) $-\sqrt{6.25} =$ _____

課 P60 例 4

③ 已知一個正方形的面積為 19600 平方公分，求其邊長。

課 P60 例 4

④ 依下列各小題所提供的數據，按步驟回答下列問題，並求 $\sqrt{11}$ 的近似值到小數點後第一位。

課 P63 例 5

(1) 因為 $1^2=1$ ， $2^2=4$ ， $3^2=9$ ， $4^2=16$ ，所以 $\sqrt{11}$ 在哪兩個連續整數之間？

答：_____ $< \sqrt{11} <$ _____。

(2) 因為 $(3.1)^2=9.61$ ， $(3.2)^2=10.24$ ， $(3.3)^2=10.89$ ， $(3.4)^2=11.56$ ，所以 $\sqrt{11}$ 在哪兩個連續一位小數之間？

答：_____ $< \sqrt{11} <$ _____。

(3) 根據 $(3.35)^2=11.2225$ ，比較 $\sqrt{11}$ 和 3.35 的大小關係。(填 $>$ 或 $<$)

答： $\sqrt{11}$ _____ 3.35。

(4) 以四捨五入法求 $\sqrt{11}$ 的近似值到小數點後第一位，得 $\sqrt{11} \approx$ _____。

- ⑤ 利用計算機算出下列各數的值或近似值。(若該值為近似值，則以四捨五入法取到小數點後第一位)：

課 P64 隨堂

(1) $\sqrt{230} \approx$ _____。

(2) $\sqrt{841} =$ _____。

- ⑥ 求下列各數的平方根：

課 P66 例 6

(1) 6

(2) $1\frac{9}{16}$

(3) 6.76

(4) $2^4 \times 3^4 \times 5^2$

- ⑦ 若 ± 16 是 $3x-5$ 的平方根，則 $x = ?$

課 P67 例 7

2-2 根式的運算

帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2}+3$ 、 $\sqrt{2}-1$ 、 $(-2)\times\sqrt{2}$ 、 $1\div\sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

1 根式的表示

多項式的簡記

$2\cdot x$ 可寫成 $2x$ 。

$(-\frac{1}{2})\cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。

$x\div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。



根式的簡記

$2\cdot\sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。

$(-\frac{1}{2})\times\sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{2}\div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

根式的簡記

若 $a\neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b} \quad (2) \sqrt{b}\div a=\frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3\times 2\sqrt{2}=3\times 2\times\sqrt{2}=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法，我們可以做整數或分數與根式的運算。

隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $-5\times 2\sqrt{3}$

(2) $-\frac{4}{3}\sqrt{2}\times(-6)$

(3) $(-4\sqrt{2})\div 6$

2 根式的乘法

由前面的說明可以得到，若 a 、 b 、 c 為正數或 0 時， $a \times b\sqrt{c} = (a \times b) \times \sqrt{c}$ 。
 那麼 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a \times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 $2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2}$ ，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \times 3} (= \sqrt{6})$ 呢？

$$\begin{aligned} \text{因為 } (\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 \\ &= 2 \times 3 \end{aligned}$$

而且 $(\sqrt{2 \times 3})^2 = 2 \times 3$

由於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2 \times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。事實上，若 $a \geq 0$ ， $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

根式的乘法運算

若 a 、 b 為正數或 0，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

自評 P90 第 2 題(1)

例 1 根式的乘法運算

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

(3) $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$

解

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{3} \times \sqrt{7} \\ &= \sqrt{3 \times 7} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}} \\ &= \sqrt{6 \times \frac{5}{3}} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt{2} \times \sqrt{18} \\ &= \sqrt{2 \times 18} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

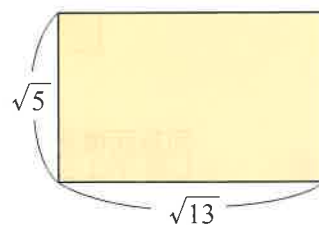
隨堂練習

1. 求下列各根式的乘積：

$$(1) \sqrt{5} \times \sqrt{14}$$

$$(2) \sqrt{\frac{5}{3}} \times \sqrt{\frac{9}{5}}$$

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。



例2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

解 $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

$$2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

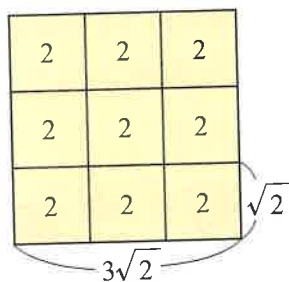
所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

隨堂練習

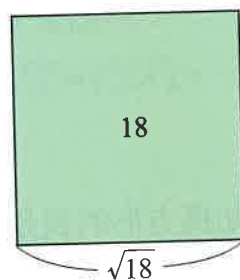
比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。

最簡根式

下圖是由 9 個面積為 2 的正方形所構成的大正方形，其面積為 18。



因為面積為 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ ，
所以大正方形的邊長為 $3\sqrt{2}$



因為大正方形的面積為 18，
所以其邊長為 $\sqrt{18}$

由上述可以知道 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 。

透過根式的運算，可以得到 $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 。像這種 $r\sqrt{n}$ 形式的根式，其中 r 是整數或分數， n 是正整數，且將 n 化成標準分解式後，每一個質因數的指數都是 1，稱 $r\sqrt{n}$ 為**最簡根式**。例如： $\sqrt{42}$ 、 $3\sqrt{6}$ 、 $\frac{5}{7}\sqrt{21}$ 都是最簡根式。

一個根式有下列任何一種情形時，就不是最簡根式：

(1) 根號內的正整數，化成標準分解式後，有任何一個質因數的指數大於 1。

例如： $\sqrt{75}$ 不是最簡根式。因為 $75 = 3 \times 5^2$ ，質因數 5 的指數為 2。

(2) 根號內有分數或小數。

例如： $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt{0.7}$ 都不是最簡根式，因為 $\frac{2}{3}$ 是分數、0.7 是小數。

(3) 分母有根式。

例如： $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 不是最簡根式，因為 $\sqrt{2}$ 在分母。

 隨堂練習

下列根式中，哪些是最簡根式？

$$\sqrt{15}、\sqrt{18}、\sqrt{25}、\frac{2}{3}\sqrt{6}、\sqrt{\frac{7}{5}}、\frac{\sqrt{24}}{2}、\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}、\sqrt{5.1}$$

例3 將 $\sqrt{a^m \times b^n}$ 化為最簡根式

自評 P90 第 1(1)、2 題

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{5^2 \times 3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 3^2}$

解 (1) $\sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$
 $= 5 \times \sqrt{3}$
 $= 5\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 3^2} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 2}$
 $= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2}$
 $= 2^2 \times 3 \times \sqrt{2}$
 $= 12\sqrt{2}$

 隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{2^4 \times 3^3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 5^3}$



例4 利用標準分解式將 $\sqrt{a}$ 化為最簡根式將 $\sqrt{108}$ 化為最簡根式。

解 $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \times 3^3}$
 $= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3}$
 $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$
 $= 2 \times 3 \times \sqrt{3}$
 $= 6\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 108} \\ 2 \overline{) 54} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{50}$

(2) $2\sqrt{27}$

數學 FUN 手玩

下圖中有一隻飢餓的狗狗，只要沿著最簡根式，就可以吃到美味的骨頭，試著幫他找出路徑吧！（只能走上、下、左、右，不能走斜的喔！）

 $\sqrt{2}$ $\sqrt{12}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{23}$ $\sqrt{44}$ $\sqrt{66}$ $\sqrt{65}$ $\sqrt{96}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt{32}$ $\sqrt{17}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{48}$ $\sqrt{67}$ $\sqrt{36}$ $\sqrt{88}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{19}$ $\sqrt{21}$ $\sqrt{52}$ $\sqrt{79}$ $\sqrt{70}$ $\sqrt{71}$ $\sqrt{77}$ (終點)



3 根式的除法

前面學過 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 3}$ (即 $\sqrt{\frac{2}{3}}$) 呢？
比較下面兩個式子：

$$(1) \sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ 且 } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \sqrt{2 \div 3} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ 且 } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

又 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 均為正數，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ；事實上，若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

隨堂練習

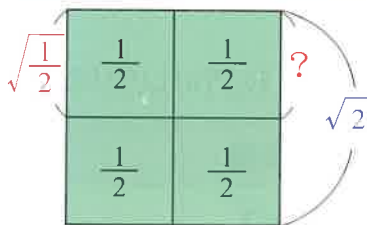
計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{65} \div \sqrt{13}$$

$$(2) \sqrt{63} \div \sqrt{7}$$

Thinking

右圖是一個面積為 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ 。將此正方形分割成四個大小一樣的小正方形，每個小正方形的面積是 $\frac{1}{2}$ ，因此邊長為 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 。你可以看出 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 與 $\sqrt{2}$ 有什麼關係嗎？



由 **Thinking** 可知 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，又從根式的除法運算可得 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

而 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 與 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 這兩種表示方式，哪一種較容易進行估算呢？

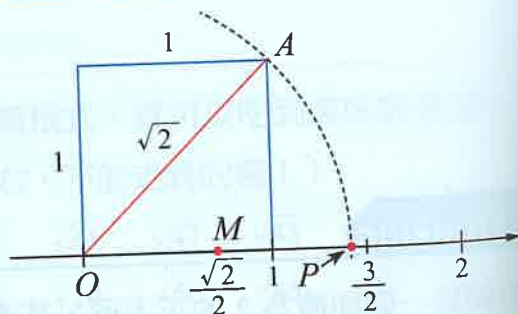
由於 $\sqrt{2}$ 並非有限小數，僅能用 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 來加以估計，因此 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414}$ 。在不使用計算機或相關運算工具的情況下， $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 不易估算，如果利用 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 進行估算就容易多了。所以當分母是根式且無運算工具可使用時，可先將分母化成整數。

以 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 為例，透過根式的運算得到 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，像這樣將 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的分母從 $\sqrt{2}$ 化成 2 的過程，稱為**有理化分母**。

有理化分母也可將根式化成最簡根式，例如： $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。如果要將 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 化成最簡根式，必須把分母的根式消去，使分母變成一個整數。此時可以利用 $(\sqrt{3})^2 = 3$ ，將 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 的分子和分母同乘以 $\sqrt{3}$ ，即 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (或 $\frac{1}{3}\sqrt{6}$)，而 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 就是 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 的最簡根式。

補給站 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在數線上的位置

如右圖，以邊長是 1 的正方形頂點 O 為圓心，對角線 OA 為半徑畫弧，在數線上標示出 $\sqrt{2}$ (P 點) 的位置後，即可知道 OP 的中點 M 就代表 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在數線上的位置。



我們可以使用計算機來檢驗這個結果，操作方法如下：

數值	按法	螢幕顯示
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2 SHIFT x² ÷ 2 =	0.707106781

例5 有理化分母

自評 P90 第 1(3)、2 題

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{\frac{7}{18}}$

(3) $\sqrt{0.7}$

解 (1) $\frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \xleftarrow{\text{分子、分母同乘以 } \sqrt{5}}$

$$= \frac{4 \times \sqrt{5}}{3 \times 5}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

(2) $\sqrt{\frac{7}{18}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{18}}$

$$= \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3 \times 2}$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{6}$$

(3) $\sqrt{0.7} = \sqrt{\frac{7}{10}}$

$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}$$

$$= \frac{\sqrt{70}}{10}$$

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{\frac{7}{12}}$

(4) $\sqrt{1.3}$

例 6 根式的除法運算

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{6} \div \sqrt{12}$

(2) $\sqrt{45} \div \sqrt{30}$

解

(1) $\sqrt{6} \div \sqrt{12} = \sqrt{6 \div 12}$

$$= \sqrt{\frac{6}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\sqrt{45} \div \sqrt{30} = \sqrt{45 \div 30}$

$$= \sqrt{\frac{45}{30}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

**隨堂練習**

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{5} \div \sqrt{15}$

(2) $\sqrt{2} \div \sqrt{11}$

(3) $\sqrt{26} \div \sqrt{6}$

自評 P90 第 2 題(2)、(3)

例 7 根式的除法運算

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \div \sqrt{6}$

(2) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{6}{5}}$

解

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \div \sqrt{6}$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3} \div 6}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(2) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{6}{5}}$

$$= \sqrt{\frac{2}{5} \div \frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \div \sqrt{5}$

(2) $\sqrt{\frac{5}{4}} \div \sqrt{\frac{8}{5}}$

我們也可以利用根式的運算規則計算根式的近似值。

自評 P90 第 3 題

例 8 根式運算規則的應用

已知 $\sqrt{17} \approx 4.123$ 。利用根式的運算規則，計算下列各數的近似值：

(1) $\sqrt{1700}$

(2) $\sqrt{0.17}$

(3) $\sqrt{6800}$

解

$$(1) \sqrt{1700} = \sqrt{17 \times 100}$$

$$= 10\sqrt{17}$$

$$\approx 10 \times 4.123$$

$$= 41.23$$

$$(2) \sqrt{0.17} = \sqrt{\frac{17}{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{10}$$

$$\approx \frac{4.123}{10}$$

$$= 0.4123$$

$$(3) \sqrt{6800} = \sqrt{20^2 \times 17}$$

$$= 20\sqrt{17}$$

$$\approx 20 \times 4.123$$

$$= 82.46$$



隨堂練習

已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 。利用根式的運算規則，計算下列各數的近似值：

(1) $\sqrt{200} \approx$ _____。

(2) $\sqrt{0.02} \approx$ _____。

(3) $\sqrt{0.08} \approx$ _____。

4 根式的加減

▶ 同類方根

若 a 、 b 為正數，將 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 化為最簡根式後，如果根號內的數相同，則 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 稱為**同類方根**。

例如：(1) $6\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $-\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 是同類方根。

(2) $\sqrt{75}$ 和 $\sqrt{12}$ 化成最簡根式後是 $5\sqrt{3}$ 和 $2\sqrt{3}$ ，所以 $\sqrt{75}$ 和 $\sqrt{12}$ 是同類方根。

(3) $5\sqrt{3}$ 和 $5\sqrt{2}$ 不是同類方根。

如同多項式的加減運算，應合併同類項；計算根式的加減時，應將同類方根合併，不是同類的方根則不能合併。

多項式的同類項合併

$x + 2x$ 可合併成 $3x$



根式的同類方根合併

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ 可合併成 $3\sqrt{2}$

例9 同類方根的合併

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3}$

解 (1) $7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 7 \times \sqrt{3} - 3 \times \sqrt{3} \leftarrow 7\sqrt{3} \text{ 和 } 3\sqrt{3} \text{ 為同類方根，可以合併。}$
 $= (7-3) \times \sqrt{3}$
 $= 4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2} + \sqrt{3}$
 $= -4\sqrt{2} + \sqrt{3} \leftarrow 4\sqrt{2} \text{ 和 } \sqrt{3} \text{ 不為同類方根，不能合併。}$



 隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) 3\sqrt{11} - 8\sqrt{11}$$

$$(2) 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$$

計算根式的加減時，通常將各項化為最簡根式後，就可以很清楚地觀察到哪些項是同類方根，再加以合併。

自評 P91 第 4 題(1)~(3)

例 10 化簡後再合併同類方根

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{108} - 5\sqrt{12} + \sqrt{45}$$

$$(2) \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

解

$$\begin{aligned} (1) & \sqrt{108} - 5\sqrt{12} + \sqrt{45} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3^3} - 5 \times \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 5} \\ &= 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{5} \\ &= -4\sqrt{3} + 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + \frac{7}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

 隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) 4\sqrt{12} - 2\sqrt{18} - \sqrt{3}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

5 根式的四則運算

根式也和其他的數一樣，可進行四則運算。

例11 根式的四則運算

自評 P91 第4題(4)

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) -2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{1}{12}}$$

解 (1) $-2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$$= -2\sqrt{3} \times \sqrt{6} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{18} + 2\sqrt{6}$$

$$= -6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \div \frac{1}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 12}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$

$$(2) \sqrt{3}-5(\sqrt{3}+5)$$

$$(3) (\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{3})$$

$$(4) \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt{\frac{3}{2}}$$



在第 1 章所學的乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 中, 當 a, b 是根式時也一樣成立。

自評 P91 第 5 題(1)

例 12 利用完全平方公式化簡根式

利用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展開 $(3+2\sqrt{5})^2$, 並化簡其結果。

解

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2 \times a \times b + b^2 \\
 (3+2\sqrt{5})^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 \\
 &= 9 + 12\sqrt{5} + 20 \\
 &= 29 + 12\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

隨堂練習

利用 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 展開 $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$, 並化簡其結果。

Thinking

- 分別計算 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 和 $(\sqrt{5})^2$, 並運用此結果判別 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 和 $\sqrt{5}$ 是否相等?
- 分別計算 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ 和 $(\sqrt{2})^2$, 並運用此結果判別 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ 和 $\sqrt{2}$ 是否相等?

例13 利用平方差公式化簡根式

自評 P91 第5題(2)

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$ ，並化簡其結果。

解

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\
 (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) &= 3^2 - (\sqrt{5})^2 \\
 &= 9 - 5 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

隨堂練習

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ，並化簡其結果。

如果要將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 化成最簡根式，必須有理化分母。同樣地，化簡 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 也要有理化分母，此時可利用平方差公式，將 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 乘以 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，化簡過程如下：

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

有理化的好處是：有些根式乍看之下不能合併，但如果可以化為同類方根，便可以進一步合併，也就是將答案化簡。例如：

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

答案也可表示成 $\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

例14 利用平方差公式有理化分母

自評 P91 第 6 題

利用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 化簡下列各式：

$$(1) \frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

思路分析

分母是 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 時，分母、分子同乘以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 。

分母是 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 時，分母、分子同乘以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 。

解 (1) $\frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3 \times (\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2) \times (\sqrt{7}+2)} \leftarrow \text{分母、分子同乘以 } (\sqrt{7}+2)$

$$= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}$$

$$= \sqrt{7}+2$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) \\ &= (\sqrt{7})^2 - 2^2 \\ &= 7-4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}) \times (\sqrt{6}-\sqrt{5})} \leftarrow \text{分母、分子同乘以 } (\sqrt{6}-\sqrt{5})$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{6-5}$$

$$= \sqrt{12}-\sqrt{10}$$

$$= 2\sqrt{3}-\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 6-5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

隨堂練習

利用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 化簡下列各式：

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

重點回顧

① 根式的乘法運算

若 $a \geq 0, b \geq 0$, 則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7}$ 。

② 最簡根式

形如 $r\sqrt{n}$ 的根式, 若 r 是整數或分數, n 是正整數, 且將 n 化成標準分解式後, 每一個質因數的指數都是 1, 則稱 $r\sqrt{n}$ 為最簡根式。

例 $\sqrt{30}, 2\sqrt{15}, \frac{2}{5}\sqrt{6}$ 都是最簡根式。

③ 根式的除法運算：

若 $a \geq 0, b > 0$, 則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 $\sqrt{35} \div \sqrt{7} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{35}{7}} = \sqrt{35 \div 7} = \sqrt{5}$ 。

④ 同類方根

(1) $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 化為最簡根式後, 如果根號內的數相同, 則 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 稱為同類方根。

例 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, 所以 $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{27}$ 為同類方根。

(2) 根式做加減運算時, 同類方根要合併; 不是同類方根就無法合併。

例 $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ 。

⑤ 有理化分母

(1) 若 $a > 0$, 則化簡分母為 $\sqrt{a}$ 的根式時, 可以利用擴分將分母、分子同乘以 $\sqrt{a}$ 。

例 $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

(2) 若 $a > 0, b > 0$, 則化簡分母為 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm b$ 或 $a \pm \sqrt{b}$ 的根式時, 可以利用平方差公式將分母有理化。

例 $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 。